ZADANIA

Zadanie D0
Podaj przykład pierścienia oraz jego podpierścienia który nie jest ideałem.
Zadanie D1
Niech $(P, +, \cdot)$ pierścień przemienny z jedynką.

(1) Pokaż że, dla każdego $a \in P$ ideał generowany przez a jest postaci

$$\langle a \rangle = \{ra : r \in P\}.$$

(2) Jaką postać ma ideał generowany przez podzbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq P$?

Zadanie D2
Wyznacz wszystkie ideały pierścienia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Zadanie D3
Niech $(P, +, \cdot)$ pierścień z jedynką. Scharakteryzuj ideały pierścienia $P \times P$.
Zadanie D4
Niech $(P, +, \cdot)$ pierścień z jedynką. Na zbiorze ID ideałów pierścienia P określamy mnożenie: dla $I_1, I_2 \in ID$ niech $I_1 \cdot I_2$ będzie zbiorem wszystkich sum $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n$, gdzie $x_i \in I_1$ oraz $y_i \in I_2$. Pokaż że tak określone mnożenie na zbiorze ID jest łączne i posiada element neutralny.
Zadanie D5
Podaj przykład nierozkładalnego wielomianu trzeciego stopnia w $\mathbb{Z}_3[x]$. Podaj konstrukcję ciała 27-elementowego.
Zadanie D6
Udowodnij, że dla dowolnych elementów a, b dziedziny całkowitości P jeśli $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ to $a \sim b$.
Zadanie D7
Pokaż, że w dziedzinie ideałów głównych każdy element nierozkładalny jest pierwszy.
Zadanie D8
Pokaż, że jeśli P jest pierścieniem bez nietrywialnych dzielników zera to pierścień wielomianów $P[x]$ także nie ma nietrywialnych dzielników zera.
Zadanie D9
Pokaż, że pierścień wielomianów dwóch zmiennych $\mathbb{R}[x, y]/\langle x^3 - y^2 \rangle$ jest dziedziną całkowitości bez jednoznaczności rozkładu.
Zadanie D10
Niech P dziedzina z jednoznacznością rozkładu. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b \in P$ ideał $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ jest ideałem głównym.
Zadanie D11
Pokaż że, każde ciało charakterystyki zero zawiera podciało izomorficzne z $\mathbb{Q}$.
Zadanie D12
Niech K rozszerzenie ciała liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Pokaż, że dla dowolnego automorfizmu α ciała K oraz dowolnej liczby wymiernej q zachodzi $\alpha(q) = q$.
Zadanie D13
Niech $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ oraz α automorfizm ciała K. Pokaż, że $\alpha(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ lub $\alpha(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
Zadanie D14
Opisz grupę automorfizmów ciała $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Zadanie D15
Uzasadnij, że ciało skończone nie jest algebraicznie domknięte.

Zadanie D16
Pokaż, że każde ciało skończone k elementowe jest ciałem rozkładu wielomianu $x^{k-1} - 1$.

Zadanie D17
Podaj podciało ciała liczb zespolonych będące ciałem rozkładu wielomianu $x^4 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Zadanie D18
Niech K ciało p^n elementowe. Pokaż że dla każdej liczby $m < n$ istnieje co najwyżej jedno podciało ciała K mające k^m elementów.