

Zad 1. Wykonaj obliczenia :

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^T; \quad 3. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{10},$$

Zad 2. Sprawdź czy zadane zbiory są podprzestrzeniami

$$1. \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$2. \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Zad 3. Zapisz wektor $(5, 3, 1)$ jako komb. liniową wektorów $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 0)$, $(9, 0, 0)$.

Zad 4. Sprawdź czy zbiór $\{(1, 2), (3, 4)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Zad 5. Znajdź bazę przestrzeni liniowej $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y \wedge z + t = 0\}$

$$\dots (x, y, z, t) = (2y, y, z, -z) = y(2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1) \dots$$

Zad 6. Które funkcje są liniowe:

$$1. f(x, y, z) = (2x + y, y + z, z - x)$$

$$2. g(x, y, z) = (x + 2y, y + z + 1)$$

$$3. h(x, y) = (x + y, x - y, x \cdot y).$$

$$4. t(x, y, z) = (z, x, y)$$

Podaj macierz tych funkcji.

Zad 7 Podaj macierze funkcji w zadanej bazie

1. $f(x, y) = (2x + 3y, -x + y)$, $B = ((2, 4), (-1, 1))$

2. $g(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$, $B = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$

Zad 9. Niech $f(x, y) = (x + y, x - y)$, $g(x, y) = (x - y, 2x + y)$.
Wyraź macierz złożenie: $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$

Zad 10 Oblicz wyznaczniki macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Metoda Laplace'a

b) Metoda operacji elementarnych.

Zad 11. Niech A, B jak w zadaniu 10.

Oblicz wyznaczniki macierzy

1 $M = A^{10} \cdot B^{-3} \cdot A^{-7} \cdot B^2$

; $A^{-k} = (A^{-1})^k$

2 $N = (A^T \cdot B)^T$

Użyj: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \dots$

Zad 12. Wyznacz macierz odwrotną do A .

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Zastosuj metodę operacji elementarnych:

$$[A | I] \xrightarrow{Op} \dots \xrightarrow{Op} [I | A^{-1}]$$

Zad 13 Rozwiąż układ równań metody Gaussa:

$$1. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 5y + 7z = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 7z + 11t = 17 \end{cases}$$

Zad 14 Zbadaj liczbę rozwiązań w zależności od a

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + ay = 8 \end{cases}$$

Użyj wzoru Cramera.

Zad 15. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartości własne λ spełnia równanie: $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$,
wektor własny dla λ spełnia równanie

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Zadanie 16 Wyznacz diagonalizację macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C.D.N.